

## Momento de inercia

### DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE DIFERENTES CUERPOS DE MUESTRA

- Determinación de la constante de restitución angular  $D_r$  del muelle de acople.
- Determinación del momento de inercia  $J$  de la varilla de haltera sin masas.
- Determinación del momento de inercia  $J$  en dependencia con la distancia  $r$  de las masas al eje de rotación.
- Determinación del momento de inercia  $J$  para un disco de madera, una esfera de madera así como de un cilindro macizo y uno hueco.
- Comprobación de la ley de Steiner.

UE1040205

07/15 UD



Fig. 1: Montaje experimental.

### FUNDAMENTOS GENERALES

La inercia de un cuerpo rígido respecto a una variación de su movimiento rotacional alrededor de un eje fijo se indica por medio del momento de inercia  $J$ . Éste depende de la distribución de las masas en el cuerpo relativa al eje de rotación y es mayor mientras mayor son las distancias de las masas al eje de rotación.

En general, el momento de inercia se define por medio de la integral de volumen:

$$(1) \quad J = \int_V r_s^2 \rho(\mathbf{x}) \cdot dV$$

$r_s$ : Parte de  $r$  perpendicular al eje de rotación

$\rho(r)$ : Distribución de la masa del cuerpo

Para el ejemplo de una varilla de haltera en la cual se han ordenado dos cuerpos de masa  $m$  simétricamente a una distancia  $r$  respecto al eje de rotación, el momento de inercia asciende a:

$$(2) \quad J = J_0 + J_m = J_0 + 2 \cdot m \cdot r^2$$

$J_0$ : Momento de inercia de la varilla de haltera sin las masas

$J_m$ : Momento de inercia de piezas masivas

Ahora se pueden fijar diferentes cuerpos de prueba en el eje de torsión. Para el tiempo de oscilación  $T$  en un período se tiene:

$$(3) \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D_r}}$$

$D_r$ : Constante de restitución angular del muelle helicoidal

Es decir, el tiempo de oscilación  $T$  es mayor mientras mayor sea el momento de inercia  $J$ .

A partir de (3) se obtiene la ecuación para la determinación del momento de inercia:

$$(4) \quad J = D_r \cdot \frac{T^2}{4\pi^2}$$

La constante de restitución angular de un muelle helicoidal se puede determinar utilizando un dinamómetro:

$$(5) \quad D_r = \frac{F \cdot r}{\alpha}$$

$\alpha$ : Desviación de la posición de equilibrio

## LISTA DE APARATOS

1	Eje de torsión	U20050	1008662
1	Puerta fotoeléctrica	U11365	1000563
1	Contador digital	U8533341	1001032/3
1	Base con orificio central, 1000 g	U13265	1002834
1	Pie soporte, 3 patas, 185 mm	U13271	1002836
1	Dinamómetro de precisión 1 N	U20032	1003104
1	Juego de cuerpos de ensayo para eje de torsión	U20051	1008663

## MONTAJE Y REALIZACIÓN

- La disposición de medición se monta como se muestra en la Fig. 1. Utilizando el nivel de burbuja y los tornillos de nivelación en el pie soporte se orienta el eje de torsión en la dirección horizontal.
- La puerta fotoeléctrica se conecta en la entrada A del contador digital. En el contador digital, el conmutador del selector de modos de trabajo se ajusta en el símbolo para la medición de la duración de períodos de un péndulo.

### Observación:

- El montaje experimental se desvía de tal forma que el muelle de acoplamiento siempre se contraiga y no que se estire.
- Al iniciar del proceso de oscilación se recomienda una desviación de  $180^\circ$  (max.  $360^\circ$ ).

### Determinación de la constante de restitución angular $D_r$ del muelle de acoplamiento

- El dinamómetro de resorte se engancha en la varilla de haltera secuencialmente en las distancias  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  y  $30$  cm del centro del eje de rotación y se desvía angularmente en  $\alpha = 180^\circ = \pi$ . Se debe tener cuidado que el dinamómetro quede siempre orientado perpendicularmente a la varilla de haltera.

- En el dinamómetro se leen los valores para la fuerza necesaria para la desviación en las distancias correspondientes. Todos los valores se anotan en la tabla 1.

### Determinación del momento de inercia $J_0$ de la varilla de haltera sin masas.

- La varilla de haltera sin masas acopladas se desvía en  $180^\circ$  y utilizando el contador digital se mide la duración de un período de oscilación  $T_0$ .

### Determinación del momento de inercia $J$ en dependencia con la distancia $r$ de las masas al eje de rotación.

- Los dos masas se fijan en la varilla de haltera, secuencialmente a una distancia de  $r = 5, 10, 15, 20, 25$  y  $30$  cm cada vez, simétricamente a la derecha y a la izquierda del centro de rotación.
- Los tornillos en las masas, los cuales presionan las esferas de enclavamiento contra la varilla de haltera no se accionan; los tornillos han sido ajustados de tal forma que las masas se dejan desplazar y se sostienen contra la fuerza centrífuga.
- La varilla de haltera se desvía en  $180^\circ$  y utilizando el contador digital y cada vez se mide la duración de un período  $T$  de oscilación luego se anota en la tabla 2.

### Determinación del momento de inercia $J$ de un disco de madera, de una esfera de madera, de un cilindro macizo y de uno hueco

- Los cuerpos de ensayo se montan secuencialmente en el eje de rotación. Para el cilindro macizo y el hueco se utiliza el plato de alojamiento.
- Para la medición de la duración de un período de oscilación, se fija cada vez, en la forma adecuada, una pequeña banderola de interrupción de papel en el cuerpo de ensayo.
- El disco de madera y la esfera de madera secuencialmente se desvían en  $180^\circ$  y cada vez se mide la duración de un período de oscilación. Los valores se anotan en la tabla 3. Las marcas blancas en los cuerpos de ensayo se utilizan como ayudas de orientación en la desviación.
- El plato de alojamiento se desvía en  $180^\circ$  y se mide la duración de un período de oscilación. El valor se anota en la tabla 3.
- El cilindro macizo y el hueco se colocan secuencialmente sobre el plato de alojamiento y se desvían cada vez en  $180^\circ$  midiendo luego la duración de un período de oscilación. Los valores se anotan en la tabla 3. Las marcas blancas en los cuerpos de ensayo se utilizan como ayudas de orientación en la desviación.

### Comprobación de la ley de Steiner

- El perno se fija secuencialmente en las perforaciones con distancia  $a = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$  y  $14$  cm del centro del disco.
- El disco, para las diferentes posiciones del perno, se monta en el eje de rotación, se desvía cada vez en  $180^\circ$  y se mide la duración de un período de oscilación. Para ello se fija en forma adecuada una pequeña banderola de interrupción de papel en el disco. Los valores se anotan en la tabla 4.

### EJEMPLO DE MEDICION

#### Determinación de la constante de restitución angular $D_r$ del muelle de acoplamiento

Tab. 1: Valores de medida para la fuerza  $F$  a una distancia  $r$  del centro del eje de rotación en una desviación estática de la varilla de haltera en  $\alpha = 180^\circ = \pi$ .

$r / \text{m}$	$F / \text{N}$
0,05	1,72
0,10	0,86
0,15	0,58
0,20	0,46
0,25	0,32
0,30	0,26

#### Determinación del momento de inercia $J_0$ de la varilla de haltera sin masas.

Duración del período de oscilación  $T_0$ : 2460 ms

#### Determinación del momento de inercia $J$ en dependencia con la distancia $r$ de las masas al eje de rotación.

Tab. 2: Duración de período  $T$  para la oscilación de la varilla de haltera con las masas acopladas en la varilla de haltera a una distancia  $r$ .

$r / \text{m}$	$T / \text{ms}$
0,05	2825
0,10	3663
0,15	4740
0,20	5926
0,25	7170
0,30	8440

#### Determinación del momento de inercia $J$ de un disco de madera, de una esfera de madera, de un cilindro macizo y de uno hueco

Tab. 3: Duración de período  $T$  para la oscilación de diferentes cuerpos de ensayo.

Cuerpo de ensayo	$T / \text{ms}$
Disco	1800
Esfera	1880
Plato de alojamiento	512
Cilindro macizo + Plato de alojamiento	917
Cilindro hueco + Plato de alojamiento	1171

### Comprobación de la ley de Steiner

Tab. 4: Duración del período  $T$  para la oscilación del disco al-rededor de diferentes ejes a una distancia  $a$  del centro de gravedad.

$a / \text{cm}$	$T / \text{ms}$
0	2922
2	2960
4	3121
6	3327
8	3622
10	3948
12	4359
14	4748

### EVALUACIÓN

#### Determinación de la constante de restitución angular $D_r$ del muelle de acoplamiento

De (5) se obtiene:

$$(6) \quad F = \alpha \cdot D_r \cdot \frac{1}{r} = C \cdot \frac{1}{r} \quad \text{con } C = \alpha \cdot D_r$$

- Los valores de medida para las fuerzas  $F$  de la tabla 1 se grafican en contra del inverso  $1/r$  de la distancia al eje de giro y se ajusta una recta entre los puntos de medida.

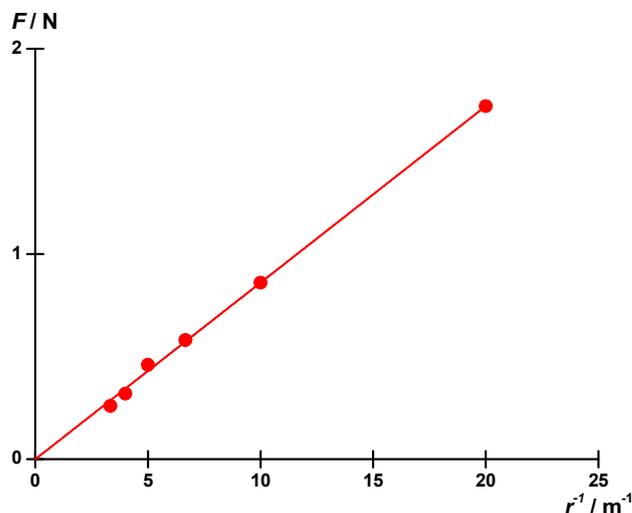


Fig. 2: Fuerza  $F$  en dependencia con  $1/r$  el inverso de la distancia de las masas.

- De la pendiente de la recta  $C$  según (6) se determina la constante de restitución angular  $D_r$ :

$$(7) \quad C = \alpha \cdot D_r \Leftrightarrow D_r = \frac{C}{\alpha} = \frac{0,0860 \text{ Nm}}{\pi} = 0,0274 \text{ Nm}$$

**Determinación del momento de inercia  $J_0$  de la varilla de haltera sin masas.**

Para el momento de inercia de la varilla de haltera sin masas adicionales se obtiene de (4):

$$(8) \quad J_0 = 0,0274 \text{ Nm} \cdot \frac{(2,460 \text{ s})^2}{4\pi^2} = 4,20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 .$$

**Determinación del momento de inercia  $J$  en dependencia con la distancia  $r$  de las masas al eje de rotación.**

- Se determina el momento de inercia  $J$  de la varilla de haltera con masas adicionales, de acuerdo con (4) a partir de los valores en la tabla 2 y se anota en la tabla 5.
- Se determinan los momentos de inercia de las masas adicionales de acuerdo con

$$(9) \quad J_m = J - J_0$$

y se anotan en la tabla 5.

Tab. 5: Duración del período  $T$ , momento de inercia  $J$  de la varilla de haltera con masas adicionales y momento de inercia  $J_m$  de las masas adicionales para diferentes distancias  $r$  al eje de giro.

$r / \text{m}$	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_m / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0,05	2,825	5,54	1,34
0,10	3,663	9,31	5,11
0,15	4,740	15,6	11,4
0,20	5,926	24,4	20,2
0,25	7,170	35,7	31,5
0,30	8,440	49,4	45m2

Se acuerdo con (2) se tiene:

$$(10) \quad J_m = 2 \cdot m \cdot r^2$$

- Los momentos de inercia  $J_m$  de la tabla 5 se grafican contra  $r^2$ , los cuadrados de las distancias al eje de giro, y se comprueba la dependencia lineal de (10) (Fig 3).

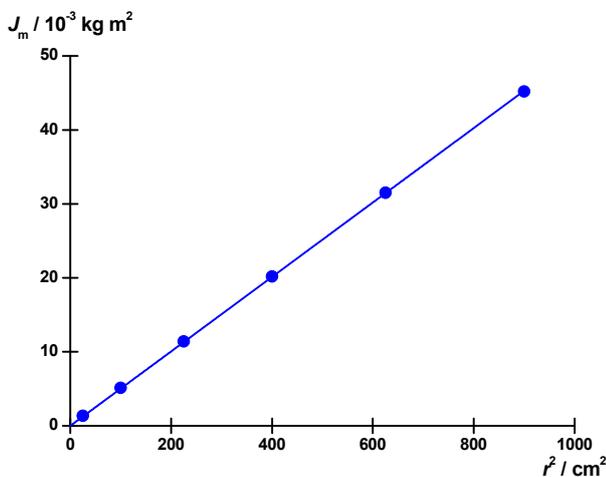


Fig. 3: Momento de inercia  $J_m$  de las masas adicionales en dependencia con el cuadrado de las distancias de las masas  $r$ .

**Determinación del momento de inercia  $J$  de un disco de madera, de una esfera de madera, de un cilindro macizo y de uno hueco**

- Se determina el momento de inercia  $J$  para diferentes cuerpos de ensayo, de acuerdo con (4) a partir de los valores de medida en la Tabla 3 y los valores se anotan en la Tabla 6.
- Para la determinación del momento de inercia del cilindro macizo  $J_{Mz}$  y del cilindro hueco  $J_H$  se debe substraer cada vez el momento de inercia del plato de alojamiento  $J_{PA}$  de los valores de los momentos de inercia del cilindro macizo + plato de alojamiento y del momento de inercia del cilindro hueco + plato de alojamiento  $J_{MzP}$  y  $J_{HP}$ :

$$(11) \quad \begin{aligned} J_V &= J_{VT} - J_T \\ J_H &= J_{HT} - J_T \end{aligned}$$

- Se calculan los momentos de inercia teóricos  $J_{T0}$  utilizando los datos del anexo y se anotan en la Tabla 6 y se comparan con los valores determinados por medio de las mediciones .

Tab. 6: Momentos de inercia  $J$  para diferentes cuerpos de ensayo.

Cuerpo de ensayo	$T / \text{s}$	$J / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$J_{th} / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Disco	1,800	2,25	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 2,57$
Esfera	1,880	2,45	$2/5 \cdot m \cdot r^2 = 2,54$
Plato de alojamiento	0,512	0,18	–
Cilindro macizo + Plato de alojamiento	0,917	0,58	–
Cilindro macizo	–	0,40	$1/2 \cdot m \cdot r^2 = 0,43$
Cilindro hueco + Plato de alojamiento	1,171	0,95	–
Cilindro hueco	–	0,77	$m \cdot r^2 = 0,86$

Los valores determinados a partir de la medición aon-cuerdan bien con los valores calculados teóricamente.

**Comprobación de la ley de Steiner**

- Se determinan los momentos de inercia  $J_a$  para las diferentes distancias  $a$  de acuerdo con (4), de los valores de medida en la Tab. 7 y se anotan los valores en la Tab. 7.

Tab. 7: Momento de inercia  $J_a$  del disco oscilando alrededor de diferentes ejes a una distancia  $a$  del centro de gravedad.

$a / \text{cm}$	$T / \text{s}$	$J_a / 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
0	2,922	5,93
2	2,960	6,08
4	3,121	6,76
6	3,327	7,68
8	3,622	9,11
10	3,948	10,8
12	4,359	13,2
14	4,748	15,6

- Según la ley de Steiner se tiene:  
(12)  $J_a = J_0 + m \cdot a^2$  con  $J_0 = J_a(a=0)$
- Se hace una gráfica  $J_a - J_0$  contra  $a^2$  y se comprueba la dependencia lineal de (12), así se comprueba la ley de Steiner (Fig. 4).

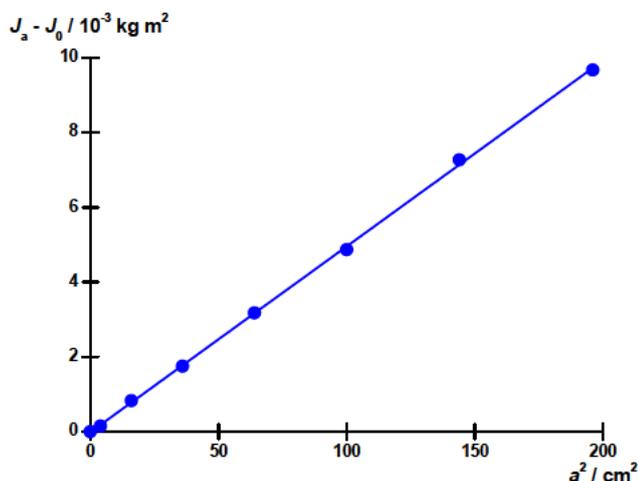


Fig. 4: Diferencia entre los momentos de inercia  $J_a - J_0$  del disco en dependencia con la distancia  $a$  del eje de oscilación al centro de gravedad.

## ANEXO: DATOS TÉCNICOS

### Varilla de haltera

Largo:	620 mm
Masa:	aprox. 135 g
Pesas:	c/u 260 g

### Disco

Diámetro:	320 mm
Masa:	aprox. 495 g
Perforaciones:	8
Distancia entre perforaciones:	20 mm

### Esfera de madera

Diámetro:	146 mm
Masa:	aprox. 1190 g

### Disco de madera

Diámetro:	220 mm
Altura:	15 mm
Masa:	aprox. 425 g

### Plato de asiento

Diámetro:	100 mm
Masa:	aprox. 122 g

### Cilindro compacto (de madera)

Diámetro:	90 mm
Altura:	90 mm
Masa:	aprox. 425 g

### Cilindro hueco (metálico)

Diámetro externo:	90 mm
Altura:	90 mm
Masa:	aprox. 425 g